Correctesa de programes iteratius
Programació 2
Facultat d'Informàtica d'Informàtica, UPC

Professorat de PRO2

Tardor 2022

- Col·laboracions (en ordre alfabètic): Juan Luis Esteban, Ricard Gavaldà, Conrado Martínez, Fernando Orejas
- Aquestes transparències **no** substitueixen els apunts de l'assignatura, els complementen

Part I

Correctesa d'un programa

Definició:
L' estat d'un programa en un punt determinat de la execució ve donat pel valor de totes les variables actives en aquell punt.

```
// Estat = ( x = 3, y = 7, ... )
++x;
// Estat = ( x = 4, y = 7, ... )
```

Correctesa d'un programa

Definició: Correcció d'un programa

Si l'estat inicial del programa o funció satisfà la Precondició, llavors el programa acaba en un nombre finit de passos i l'estat final satisfà la Postcondició

Correctesa d'un programa

Definició: Correcció d'un programa

Si l'estat inicial del programa o funció satisfà la Precondició, llavors el programa acaba en un nombre finit de passos i l'estat final satisfà la Postcondició

- Com sabem que un programa és correcte?
- Només podem fer un nombre finit (i petit) de proves
- Raonament genèric sobre els estats del programa

Demostració de correctesa?

```
// Pre: x = X and y = Y ≥ 0
int p = 1;
while (y > 0) {
    p = p * x;
    y = y - 1;
}
// Post: p = X^Y
```

Demostració de correctesa?

Ho he provat i . . .

```
// Pre: x = X and y = Y ≥ 0
int p = 1;
while (y > 0) {
    p = p * x;
    y = y - 1;
}
// Post: p = X^Y
```

Demostració de correctesa?

```
// Pre: x = X and y = Y ≥ 0
int p = 1;
while (y > 0) {
    p = p * x;
    y = y - 1;
}
// Post: p = X^Y
```

Ho he provat i . . .
. . . amb 5 i 3 dona 125

Demostració de correctesa?

```
// Pre: x = X and y = Y ≥ 0
int p = 1;
while (y > 0) {
    p = p * x;
    y = y - 1;
}
// Post: p = X^Y
```

Ho he provat i . . .
. . . amb 5 i 3 dona 125
. . . amb 0 i 100 dona 0

Demostració de correctesa?

```
// Pre: x = X and y = Y ≥ 0
int p = 1;
while (y > 0) {
    p = p * x;
    y = y - 1;
}
// Post: p = X^Y
```

Ho he provat i . . .
. . . amb 5 i 3 dona 125
. . . amb 0 i 100 dona 0
. . . amb -4 i 2 dona 16

Demostració de correctesa?

```
// Pre: x = X and y = Y ≥ 0
int p = 1;
while (y > 0) {
    p = p * x;
    y = y - 1;
}
// Post: p = X^Y
```

Ho he provat i . . .
. . . amb 5 i 3 dona 125
. . . amb 0 i 100 dona 0
. . . amb -4 i 2 dona 16
. . . amb 4 i -2 no cal provar (no es compleix la Pre)

Demostració de correctesa?

```
// Pre: x = X and y = Y ≥ 0
int p = 1;
while (y > 0) {
    p = p * x;
    y = y - 1;
}
// Post: p = X^Y
```

Ho he provat i . . .
. . . amb 5 i 3 dona 125
. . . amb 0 i 100 dona 0
. . . amb -4 i 2 dona 16
. . . amb 4 i -2 no cal provar (no es compleix la Pre)
. . . per tant, és correcte!

Demostració de correctesa?

```
// Pre: x = X and y = Y ≥ 0
int p = 1;
while (y > 0) {
    p = p * x;
    y = y - 1;
}
// Post: p = X^Y
```

Ho he provat i . . .
. . . amb 5 i 3 dona 125
. . . amb 0 i 100 dona 0
. . . amb -4 i 2 dona 16
. . . amb 4 i -2 no cal provar (no es compleix la Pre)
. . . per tant, és correcte!

Nombre finit (petit) de casos
$\neq$
Tots els casos

Demostració de correctesa?

```
// Pre: x = X and y = Y ≥ 0
int p = 1;
while (y > 0) {
    p = p * x;
    y = y - 1;
}
// Post: p = X^Y
```

Demostració de correctesa?

```
// Pre: x = X and y = Y ≥ 0
int p = 1;
while (y > 0) {
    p = p * x;
    y = y - 1;
}
// Post: p = X^Y
```

"Inicialitzem p a 1 (el producte de 0 factors).

Demostració de correctesa?

```
// Pre: x = X and y = Y ≥ 0
int p = 1;
while (y > 0) {
    p = p * x;
    y = y - 1;
}
// Post: p = X^Y
```

"Inicialitzem p a 1 (el producte de 0 factors).
Llavors, anem multiplicant p per x i decrementant y en cada pas.

Demostració de correctesa?

```
// Pre: x = X and y = Y ≥ 0
int p = 1;
while (y > 0) {
    p = p * x;
    y = y - 1;
}
// Post: p = X^Y
```

"Inicialitzem p a 1 (el producte de 0 factors).
Llavors, anem multiplicant p per x i decrementant y en cada pas.
Repetim fins que $y = 0$, i llavors ja hem acabat.

Demostració de correctesa?

```
// Pre: x = X and y = Y ≥ 0
int p = 1;
while (y > 0) {
    p = p * x;
    y = y - 1;
}
// Post: p = X^Y
```

"Inicialitzem p a 1 (el producte de 0 factors).
Llavors, anem multiplicant p per x i decrementant y en cada pas.
Repetim fins que $y = 0$, i llavors ja hem acabat.
Ja es veu que a p tindrem X^Y."

Demostració de correctesa?

```
// Pre: x = X and y = Y ≥ 0
int p = 1;
while (y > 0) {
    p = p * x;
    y = y - 1;
}
// Post: p = X^Y
```

"Inicialitzem p a 1 (el producte de 0 factors).
Llavors, anem multiplicant p per x i decrementant y en cada pas.
Repetim fins que $y = 0$, i llavors ja hem acabat.
Ja es veu que a p tindrem X^Y."

Llegir el programa

$\neq$

Dir per què satisfà la seva espec

Com ho fem, doncs?

- Raonament genèric sobre tots els estats possibles
- L'eina principal és la inducció
- En programes recursius, aplicada directament
- En programes iteratius, amagada en els invariants

Part I

Com raonar sobre programes

- Recordem: estat d'un programa = valors de totes les variables

```
(x = 10, y = -5, b = true)
(x = 10, y = -15, b = false)
```

Com raonar sobre programes

- Recordem: estat d'un programa = valors de totes les variables

  `(x = 10, y = -5, b = true)`

  `(x = 10, y = -15, b = false)`

- Asserció: Descripció d'un conjunt d'estats

  `P(x,y,b)` = "`b == (x + y > 0)`"

Com raonar sobre programes

- Recordem: estat d'un programa = valors de totes les variables

  `(x = 10, y = -5, b = true)`

  `(x = 10, y = -15, b = false)`
- Asserció: Descripció d'un conjunt d'estats

  `P(x,y,b)` = "`b == (x + y > 0)`"
- El comentari "`// P`" o "`/* P */`" en un programa vol dir "en aquest punt l'estat del programa compleix `P`"

Com raonar sobre programes

- Recordem: estat d'un programa = valors de totes les variables

  `(x = 10, y = -5, b = true)`

  `(x = 10, y = -15, b = false)`
- Asserció: Descripció d'un conjunt d'estats

  `P(x,y,b)` = "`b == (x + y > 0)`"
- El comentari "`// P`" o "`/* P */`" en un programa vol dir "en aquest punt l'estat del programa compleix `P`"
- La Precondició (Pre) és l'asserció que l'estat inicial ha de satisfer
- La Postcondició (Post) és l'asserció que ha de ser certa per l'estat final; altrament el programa no satisfà l'especificació

Com raonar sobre programes

- **Mètode:** Anotarem el programa amb assercions que descriuen els estats en diferents punts, i argumentarem que cada anotació està ben feta

Com raonar sobre programes

- **Mètode:** Anotarem el programa amb assercions que descriuen els estats en diferents punts, i argumentarem que cada anotació està ben feta
- Un programa és correcte si és cert que

```
/* Pre */ programa /* Post */
```

Com raonar sobre programes

Donada una asserció P, $P(x \leftarrow E)$ és l'asserció resultant de reemplaçar simultàniament les aparicions d'x en l'asserció P per l'expressió E, e.g., $P =$ "$x \geq 5$", $P(x \leftarrow y + 3) =$ "$y + 3 \geq 5$"

- Assignació:

$$/* \ P(x \leftarrow E) \ */ \ \texttt{x = E} \ /* \ P \ */$$

- Composició seqüèncial:
  Si $/* \ P_1 \ */$ `S1` $/* \ Q_1 \ */$ és correcte, $/* \ P_2 \ */$ `S2` $/* \ Q_2 \ */$ és correcte i $Q_1 \implies P_2$ llavors

$$/* \ P_1 \ */ \ \texttt{S1;} \ \texttt{S2} \ /* \ Q_2 \ */$$

  és correcte.

Com raonar sobre programes

- Composició alternativa/condicional:
  Si `/*` $P \wedge B$ `*/ S1 /*` Q `*/` és correcte,
  i `/*` $P \wedge \neg B$ `*/ S2 /*` Q `*/` és correcte llavors

```
/* P */
if (B) S1
else S2
/* Q */
```

  és correcte.

Part I

Correctesa d'un bucle

Esquema bàsic

```
// Pre: P
inicialitzacions;
// Pre (del bucle): P'
while (B) {
  cos
}
// Post (del bucle): Q'
tractament final;
// Post: Q
```

L'invariant: Concepte i ús

- Invariant: Una asserció I que és certa després de qualsevol nombre d'iteracions (inclòs 0); per tant cal que $P' \implies I$
- A més, quan el bucle acaba, implica la Post: $I \wedge \neg B \implies Q'$

L'invariant: Concepte i ús

- Invariant: Una asserció I que és certa després de qualsevol nombre d'iteracions (inclòs 0); per tant cal que $P' \implies I$
- A més, quan el bucle acaba, implica la Post: $I \wedge \neg B \implies Q'$
- Que l'asserció I és un invariant es demostra per inducció sobre el nombre d'iteracions i: s'ha de cumplir

Esquema bàsic

```
// I ∧ B
cos del bucle
// I
```

L'invariant: Concepte i ús

- Invariant: Una asserció I que és certa després de qualsevol nombre d'iteracions (inclòs 0); per tant cal que $P' \implies I$
- A més, quan el bucle acaba, implica la Post: $I \wedge \neg B \implies Q'$
- Que l'asserció I és un invariant es demostra per inducció sobre el nombre d'iteracions i: s'ha de cumplir

Esquema bàsic

```
// I ∧ B
cos del bucle
// I
```

- Finalment, cal demostrar (potser usant l'invariant I) que el bucle segur que acaba
- Trobar i explicitar l'invariant d'un bucle és molt bona documentació d'un bucle: explica per què funciona!

Demostració d'acabament

- Funció de fita: Una funció f sobre les variables que diuen quantes iteracions queden com a molt
- Ha de tenir valor enter no negatiu: per a qualsevol estat del programa $f \geq 0$
- Cal que decreixi (al menys en 1) a cada iteració
- Si fem una iteració més, segur que $f > 0$

Passos

0 Inventar un invariant I i una funció de fita f

Demostrar que:

1 Les inicialitzacions del bucle estableixen l'invariant: $P' \implies I$

2 Si es compleix l'invariant i s'entra en el bucle, al final d'una iteració torna a complir-se l'invariant: `/*` $I \wedge B$ `*/ cos /*` I `*/`

3 L'invariant i la *negació* de la condició d'entrada al bucle impliquen la Postcondició: $I \wedge \neg B \implies Q'$

4 La funció de fita decreix a cada iteració: `/*` $I \wedge B \wedge f = F$ `*/ cos /*` $I \wedge f < F$ `*/`

5 Si entrem un cop més al bucle, la funció de fita és estrictament positiva: $I \wedge B \implies f > 0$

Exemple: Exponenciació

```
// Pre: x = X ∧ y = Y ≥ 0
int p = 1;
while (y > 0) {
    p = p * x;
    y = y - 1;
}
// Post: p = X^Y
```

- Invariant:

$$x = X \wedge y \geq 0 \wedge p \cdot X^y = X^Y$$

- Fita: y

Exemple: Exponenciació

```
// Pre: x = X ∧ y = Y ≥ 0
int p = 1;
while (y > 0) {
   if (y % 2 == 0) { x = x*x; y = y/2; }
   else { p = p * x; y = y - 1; }
}
// Post: p = X^Y
```

- Invariant:

$$y \geq 0 \wedge p \cdot x^y = X^Y$$

- Fita: y

Una mica de notació

- Donat un vector v de talla n i dos enters i, j amb $0 \leq i, j < n$, $v[i..j]$ denota el subvector entre les components i i j; si $i > j$ llavors $v[i..j]$ és un subvector buit
- Donada una llista L i dos iteradors $it1$ i $it2$ tals que $it2$ apunta a un element posterior a l'apuntat por $it1$ (o $it2 == it1$) llavors $L[it1 : it2)$ denota la subllista de L el primer element de la qual és l'apuntat per $it1$ i l'últim element és el predecessor de l'element apuntat per $it2$
- $L[: it) \equiv L[L.\texttt{begin}(), it)$
- $L[it :) \equiv L[it, L.\texttt{end}())$
- $L[:) \equiv L$

Exemple: Suma d'un vector

```
// Pre: cert
double suma(const vector<double>& v) {
    int i = 0;
    double s = 0;
    while (i < v.size()) {
        s += v[i];
        ++i;
    }
    return s;
}
// Post: el resultat es la suma de tots els elements de v
```

- Invariant:

$$0 \leq i \leq v.\texttt{size}() \wedge s = \text{suma de } v[0..i-1]$$

- Fita: $v.\texttt{size}() - i$

Exemple: Cerca un element en una llista

```
// Pre: cert
bool pertany(const list<double>& l, double x) {
    list<double>::const_iterator it = l.begin();
    bool trobat = false;
    while (it != l.end() and not trobat) {
        if (*it == x) trobat = true;
        ++it;
    }
    return trobat;
}
// Post: el resultat indica si x apareix en l
```

Exemple: Cerca un element en una llista

```
// Pre: cert
bool pertany(const list<double>& l, double x) {
    list<double>::const_iterator it = l.begin();
    bool trobat = false;
    while (it != l.end() and not trobat) {
        if (*it == x) trobat = true;
        ++it;
    }
    return trobat;
}
// Post: el resultat indica si x apareix en l
```

- Invariant:

  it apunta a un element de l o $it = l.\texttt{end}()$, i
  $trobat =$ "x pertany a $l[:it)$"

- Funció de fita: nombre d'elements de la subllista $l[it:)$

Exemple: variació de cerca lineal

```
// Pre: cert
// Post: retorna la posició en v d'un estudiant amb dni x,
// o bé -1 si cap estudiant de v té dni x
int posicio(int x, const vector<Estudiant>& v) {
   int i = 0;
   bool trobat = false;
   while (i < v.size() and not trobat) {
      if (v[i].consultar_dni() == x) trobat = true;
      else ++i;
   }
   if (trobat) return i;
   else return -1;
}
```

- Invariant:

$$0 \leq i \leq v.\texttt{size}()) \wedge x \notin v[0..i-1]$$

  i a més

$$trobat \implies \text{“}i < v.\texttt{size}() \wedge v[i].\texttt{consultar\_dni}() = x''$$

Exemple: Sumar k a una llista

Problema: donada una llista i un enter k, transformar-la en una altra resultant de sumar k a cada element de la llista original.

```
// Pre: l = [a_1,...,a_n]
void suma_k(list<int>& l, int k) {
    list<int>::iterator it;
    it = l.begin();
    while (it != l.end()) {
        *it += k;
        ++it;
    }
}
// Post: l = [a_1 + k,...,a_n + k]
```

- Invariant: $\exists i : 1 \leq i \leq n+1 : l[it:) = [a_i, \ldots, a_n] \wedge l[:it) = [a_1 + k, \ldots, a_{i-1} + k] \quad (*)$
- Funció de fita: nombre d'elements de $l[it:)$

(*) Quan $i = n+1$ entendrem que $l = [a_i, \ldots, a_n] = []$; de manera semblant quan $i = 1$ llavors

Exemple: Revessar una llista

```
// Pre: l = [a_1,...,a_n]
void revessa(list<int>& l) {
    list<int> laux;
    while (not l.empty()) {
        laux.insert(laux.begin(), *(l.begin()));
        l.erase(l.begin());
    }
    // laux = [a_n,...,a_1]
    l = laux;
}
// Post: l = [a_n,...,a_1]
```

- Invariant:

$$\exists i : 1 \leq i \leq n+1 : l = [a_i, \ldots, a_n] \wedge laux = [a_{i-1}, \ldots, a_1]$$

- Funció de fita: $l.\texttt{size}()$

Exercici: Directament sobre l, evitant la llista auxiliar

Exemple: cerca dicotòmica

```
// Pre: 0 ≤ esq = E ∧ D = dre < v.size() ∧ esq ≤ dre + 1
//      ∧ v està ordenat creixentment
// Post: x és a v[E..D] si i nomes si
//       0 ≤ esq < v.size() ∧ v[esq] = x
int posicio(double x, const vector<double>& v,
            int esq, int dre) {
   while (esq < dre) {
       int pos = (esq + dre)/2;
       if (v[pos] < x) esq = pos + 1;
       else dre = pos;
   }
   return esq;
}
```

- Invariant: $x \in v[E..D] \Leftrightarrow x \in v[esq..dre] \wedge \ldots$
- Fita: $dre - esq$. Millor encara: $f = \log_2(dre - esq + 1)$

Exemple: comptar nombre d'elements diferents

```
// Pre: cert
// Post: retorna el nombre d'elements diferents a v
int diferents(const vector<elem>& v) {
    int n = 0;
    int i = 0;
    while (i < v.size()) {
        int j = i-1;
        while (j >= 0 and v[j] != v[i]) --j;
        if (j < 0) ++n;
        ++i;
    }
    return n;
}
```

Exemple: comptar nombre d'elements diferents

```
// n = N ∧ i < v.size()
int j = i-1;
while (j >= 0 and v[j] != v[i]) --j;
if (j < 0) ++n;
// n = N + 1 si v[i] ∉ v[0..i − 1]∧
// n = N si v[i] ∈ v[0..i − 1]
```

- Invariant (del bucle intern sobre j):

$$v[i] \notin v[j+1..i-1] \wedge j \geq -1$$

- Fita: $j+1$

Exemple: comptar nombre d'elements diferents

```
// Pre: cert
// Post: diferents(v) = nombre d'elements diferents a v
int diferents(const vector<elem>& v) {
    int n = 0;
    int i = 0;
    while (i < v.size()) {
      int j = i-1; ...; if (j < 0) ++n;
      // n = nombre d'elements diferents a v[0..i]
      ++i;
    }
    return n;
}
```

- Invariant (del bucle extern sobre i):

  $0 \leq i \leq v.\texttt{size}() \wedge n =$ nombre d'elements diferents a $v[0..i-1]$

- Fita: $v.\texttt{size}() - i$

Exemple: comptar nombre d'elements diferents (2)

Amb una funció separada:

```
// Pre: [a..b] ⊆ [0..v.size() − 1]
// Post: retorna cert sii x ∈ v[a..b]
template <typename T>
bool apareix(const T& x, const vector<T>& v, int a, int b);

// Pre: cert
// Post: retorna el nombre d'elements diferents a v
int diferents(const vector<elem>& v) {
    int n = 0;
    int i = 0;
    while (i < v.size()) {
        if (not apareix(v[i],v,0,i-1)) ++n;
        ++i;
    }
    return n;
}
```

Exemple: comptar nombre d'elements diferents (2)

Invariant:

$0 \leq i \leq v.\texttt{size}() \wedge n =$ nombre d'elements diferents en $v[0..i-1]$

- Es fa servir l'especificació d'`apareix` per verificar
- Podem verificar independentment la correcció de `diferents` i d'`apareix`$\Rightarrow$ Modularitat!

Invariants “gràfics”

Sovint podem donar una representació gràfica esquemàtica d'un invariant (i en general d'una asserció), molt més intuitiva i senzilla d'entendre.
Exemple: Donat un vector v d'enters, escriu un procediment que reorganitzi els seus continguts de manera que els elements parells apareguin abans que els elements senars.

```
// Pre: cert
// Post: ???
void reorganitza_parells_senars(vector<int>& v);
```

Invariants “gràfics”

```
// Pre: v = V
// Post: ???
void reorganitza_parells_senars(vector<int>& v);
```

Invariants “gràfics”

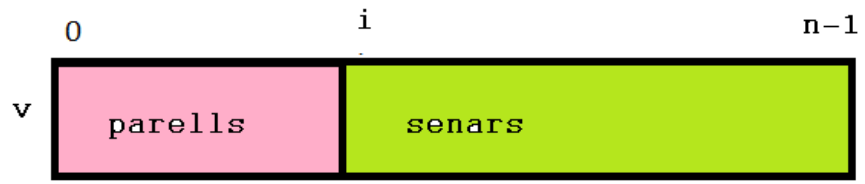
- Postcondició formal: v és una permutació de V, $n = v.\texttt{size}() \geq 0$, existeix una posició i tal que totes les posicions precedents estan ocupades per números parells

$$\exists i : 0 \leq i < n : \Big(\forall j : 0 \leq j < i : v[j] \bmod 2 = 0,$$

  i tal que la posició i totes les que vénen al seu darrera estan ocupades per números senars

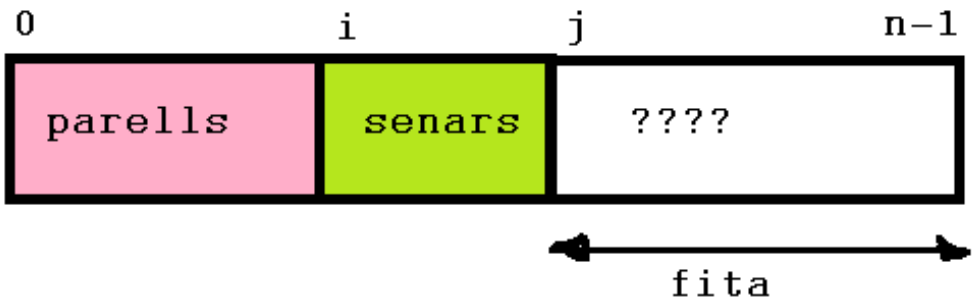
$$\forall j : i \leq j < n : v[j] \bmod 2 = 1\Big)$$

- Postcondició “gràfica”:



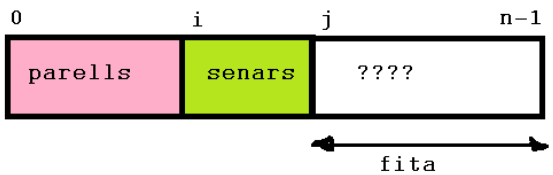
Invariants “gràfics”

```
// Pre: v = V
// Post: ???
void reorganitza_parells_senars(vector<int>& v);
```



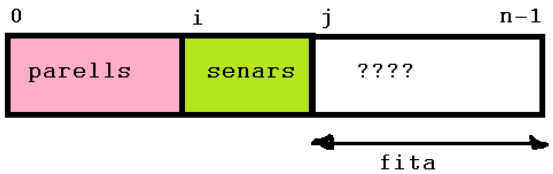
Invariants “gràfics”

```
// Pre: v = V
// Post: ...
void reorganitza_parells_senars(vector<int>& v) {
  int i = 0; int j = 0;
  while (j < v.size()) {
    if (v[j] % 2 == 0) {
      swap(v[i], v[j]); ++i;
    }
    ++j;
  }
}
```



Invariants “gràfics”

```
// Pre: v = V
// Post: ...
void reorganitza_parells_senars(vector<int>& v) {
  int i = 0;
  for (int j = 0; j < v.size(); ++j)
    if (v[j] % 2 == 0) {
      swap(v[i], v[j]); ++i;
    }
}
```



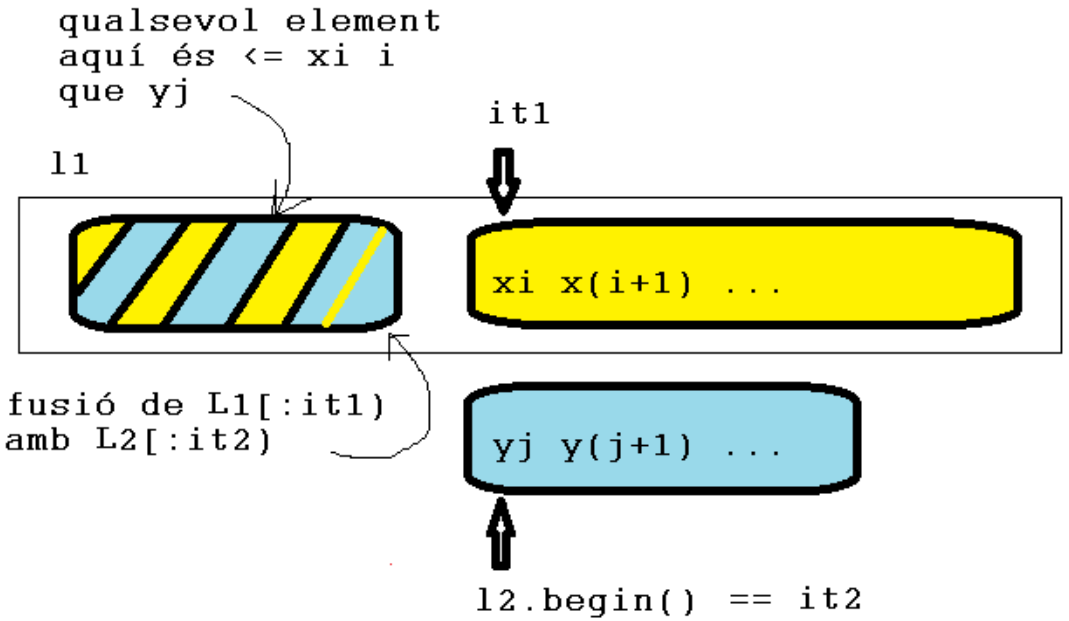
Invariants “gràfics”

```
// Pre: l1 = L1 = [x_1,...,x_m] ∧ l2 = L2 = [y_1,...,y_n] ∧
//      x_1 ≤ x_2 ≤ ··· ≤ x_m ∧ y_1 ≤ y_2 ≤ ··· ≤ y_n
// Post: l1 = [z_1,...,z_{m+n}] ∧ l2 = []
//       ∧{z_1,...,z_{m+n}} = {x_1,...,x_m} ∪ {y_1,...,y_n}
//       ∧z_1 ≤ z_2 ≤ ··· ≤ z_{m+n}
template <typename T>
void fusionar(list<T>& l1, list<T>& l2);
```

N.B. Suposem que hi ha un ordre $\leq$ definit entre elements de tipus `T`

Invariants “gràfics”

- Fita: mida de $l1[it1:) + l2.\texttt{size}()$
- Invariant:



Invariants “gràfics”

```
template <typename T>
void fusionar(list<T>& l1, list<T>& l2) {
  list<T>::iterator it1 = l1.begin();
  list<T>::iterator it2 = l2.begin();
  while (it1 != l1.end() and it2 != l2.end()) {
    if (*it1 <= *it2) ++it1;
    else {
      l1.insert(it1,*it2);
      it2 = l2.erase(it2);
    }
  }
  ...
}
```

Invariants “gràfics”

```
template <typename T>
void fusionar(list<T>& l1, list<T>& l2) {
  list<T>::iterator it1 = l1.begin();
  list<T>::iterator it2 = l2.begin();
  while (it1 != l1.end() and it2 != l2.end()) { ... }
  // it1 = l1.end() i l1[: it1) és la fusió de L1 amb L2[: it2)
  // o it2 = l2.end() i l1[: it1) és la fusió de L1[: it1) amb L2

  // it1 = l1.end() i l1 és la fusió de L1 amb L2[: it2)
  // o it2 = l2.end() i l1 és la fusió de L1 amb L2
  l1.splice(l1.end(), l2);
}
```

Part I

Disseny inductiu o derivació

Invertim el procés: de la “justificació” a l’algorisme

Donades Pre i Post, proposar:

- un invariant que les generalitzi les dues
- deduïm les inicialitzacions que, amb la Pre, estableixin l’invariant
- un cos del bucle que mantingui l’invariant
- una condició del bucle que, negada, i junt amb l’invariant impliqui la Post

Exemple: Part entera de l'arrel quadrada

```
// Pre: x = X ≥ 0
   ????
// Post: a = ⌊√X⌋ (part entera per defecte
//       de l'arrel quadrada de X)
```

Exemple: Part entera de l'arrel quadrada

```
// Pre: x = X ≥ 0
   ????
// Post: a = ⌊√X⌋ (part entera per defecte
//       de l'arrel quadrada de X)
```

Post: $a^2 \leq X < (a+1)^2$

Invariant: $I = (x = X \geq 0) \wedge (a^2 \leq x < b^2) \wedge (0 \leq a < b)$

Exemple: Part entera de l'arrel quadrada

```
// Pre: x = X ≥ 0
   ????
// Post: a = ⌊√X⌋ (part entera per defecte
//       de l'arrel quadrada de X)
```

Post: $a^2 \leq X < (a+1)^2$

Invariant: $I = (x = X \geq 0) \wedge (a^2 \leq x < b^2) \wedge (0 \leq a < b)$

```
int a = ?;
int b = ?;
while (B) {
    int c = (a+b)/2;
    if (?) a = c;
    else b = c;
}
```

Exemple: Part entera de l'arrel quadrada

```
int a = ?;
int b = ?;
while (B) {
    int c = (a+b)/2;
    if (?) a = c;
    else b = c;
}
```

- $I \wedge b \leq a+1 \implies a^2 \leq x < b^2 = (a+1)^2$, és a dir, $a = \lfloor \sqrt{x} \rfloor$ si $b \leq a+1$ (ja que $a < b$ sempre tindrem $b = a+1$); per tant la condició del bucle ha de ser la negació: `b > a+1`
- Com $0 \leq x = X < (X+1)^2$, fent `a = 0;` i `b = x+1;` establim l'invariant
- Si entrem al bucle tindrem $a < c < b$, i si $x < c^2$ llavors fent `b = c;` es torna a satisfer l'invariant; de manera similar, si $c^2 \leq x$ llavors fer `a = c;` reestablirà l'invariant.

Exemple: Part entera de l'arrel quadrada

```
int a = 0;
int b = x+1;
while (b > a+1) {
    int c = (a+b)/2;
    if (c * c <= x) a = c;
    else b = c;
}
```

El nostre algorisme és el conegut mètode de la bisecció per a trobar arrels de funcions contínues

Nombre de parelles ordenades

Donat un vector v, comptar quantes parelles $(v[i], v[i+1])$ conté tals que $v[i] < v[i+1]$.

```
int parelles_ordenades(const vector<int>& v);
```

Nombre de parelles ordenades

Invariant:

$$I = \Big(v.size() = 0 \wedge p = 0\Big) \vee \Big(1 \leq i \leq v.size() \wedge$$
$$p = \text{nombre de parelles ordenades en } v[0..i-1]\Big)$$

- La variable i recorre el vector
- La variable p compta les parelles ordenades vistes fins al moment durant el recorregut

Nombre de parelles ordenades

1. Com establim l'invariant al principi?

```
int p = 0;
int i = 1; // v[0..0] no conté cap parella
```

Nombre de parelles ordenades

2. Quan acabem? I acabem satisfent la Post? La darrera parella que cal comprovar és $(v[n-2], v[n-1])$, amb $n = v.size()$. Si la nostra condició de sortida és $i = n$, hem provat totes les parelles $(v[j-1], v[j])$ amb $j < n$, inclós el cas $j = n-1$, que és la $(v[n-2], v[n-1])$ i ja hem acabat
   Podem posar de condició del bucle $i < v.\texttt{size}()$, que cobreix bé els casos $n = 0$ i $n = 1$, i que implica sortir quan $i = v.\texttt{size}()$

Nombre de parelles ordenades

3. Com avancem mantenim l'invariant?
   Volem avançar fent $i = i + 1$. Posem que ho fem com a darrera instrucció del cos del bucle.
   Per tant just abans d'incrementar s'hauria de complir que hem provat totes les parelles $(v[j-1], v[j])$ amb $j \leq i$.
   La que falta doncs és la parella amb $j = i$, que és $(v[i-1], v[i])$

```
// I ∧ i < v.size()
if (v[i-1] < v[i]) p = p + 1;
i = i + 1;
// I
```

Nombre de parelles ordenades

```
int parelles_ordenades(const vector<int>& v) {
    int p = 0;
    for (int i = 1; i < v.size(); ++i)
      // Inv: (v.size() = 0 i p = 0) ó
      //      (p = nombre de parelles ordenades en v[0..i − 1]
      //       i 1 ≤ i ≤ v.size())
      // Fita: 0 si v.size() = 0, v.size() − i altrament
      if (v[i-1] < v[i]) ++p;
    return p;
}
```

Ordenació

1. Ordenar un vector v: Deixar-lo de manera que "per a tot i, $0 \leq i < v.size() - 1$, $v[i] \leq v[i+1]$
2. Invariant:

   "$v[0..j]$ està ordenat" ...

   Fixem-nos que quan $j = v.size() - 1$ ja tenim tot el vector ordenat.

Ordenació

1. Ordenar un vector v: Deixar-lo de manera que "per a tot i, $0 \leq i < v.size() - 1$, $v[i] \leq v[i+1]$
2. Invariant:

   "$v[0..j]$ està ordenat" ...

   Fixem-nos que quan $j = v.size() - 1$ ja tenim tot el vector ordenat.

   "i tots els elements de $v[0..j]$ són més petits o iguals que els de $v[j+1..v.size() - 1]$"

Ordenació

"$v[0..j]$ està ordenat i tots els elements de $v[0..j]$ són més petits o iguals que els de $v[j+1..v.size()-1]$"

Si incrementem j:

- $v[0..j]$ segueix ordenat! Per què?
- Però no és cert que "$v[0..j]$ és més petit que $v[j+1..v.size()-1]$"
- Només és cert si $v[j+1]$ era un element mínim de $v[j+1...v.size()-1]$
- Que hem de fer?
  - Buscar un valor mínim de $v[j+1...v.size()-1]$
  - Intercanviar-lo amb $v[j+1]$
  - Incrementant j es reestableix l'invaraint

Aquest és l'algorisme d'ordenació per selecció.

Exercici: Si no posem la segona part de l'invariant, deriveu la ordenació per inserció

Exemple: Prefix de suma màxima d'un vector

```
// Pre: v.size() > 0
// Post: el resultat és i tal que v[0] + ... + v[i] és màxima
//       i -1 ≤ i < v.size()
int psm(const vector<double>& v);
```

Exemple: Prefix de suma màxima d'un vector

```
// Post: el resultat és i tal que v[0] + ... + v[i] és màxima
//       i -1 ≤ i < v.size()
```

Què vol dir "és màxima"? Sigui $n = v.\texttt{size}()$ i definim $S_i = \sum_{k=0}^{i} v[k]$. Per conveni, $S_{-1} = 0$. Llavors estem dient que el resultat és el valor i, $-1 \leq i < n$, tal que

$$S_i = \max\{S_k \mid -1 \leq k < n\}$$

Exemple: Prefix de suma màxima d'un vector

Això suggereix que la nostra solució faci un bucle sobre j amb l'invariant:

```
// Inv: S_i = max{S_k | -1 ≤ k < j} ∧ -1 ≤ i < j ≤ n
```

Exemple: Prefix de suma màxima d'un vector

```
// Inv: −1 ≤ i < j ≤ v.size(),
//      v[0] + ··· + v[i] ≥ v[0] + ··· + v[k] per a tot k ∈ [−1..j − 1],
//      sum = v[0] + ... + v[j − 1],
//      sumi = v[0] + ... + v[i]
```

Exemple: Prefix de suma màxima d'un vector

```
// Pre: v.size() > 0
int psm(const vector<double>& v) {
    int i = -1; int j = 0;
    double sum = 0; double sumi = 0;
    while (j < v.size()) {
        sum += v[j];
        if (sum > sumi) {
            sumi = sum;
            i = j;
        }
        ++j;
    }
    return i;
}
// Post: el resultat és i tal que v[0] + ... + v[i] és màxima
//       i -1 ≤ i < v.size()
```

Percentatge d'estudiants presentats (amb nota)

- Donat un conjunt d'estudiants (`Cjt_estudiants`) retornem el percentatge d'estudiants presentats (amb nota) del conjunt
- Especificació:

```
// Pre: C conté almenys un estudiant
// Post: el resultat és el percentatge de presentats de C
double presentats(const Cjt_estudiants& C);
```

Percentatge d'estudiants presentats (amb nota)

- Per saber el % de presentats calculem primer el nombre d'estudiants amb nota
- Tindrem una potscondició P' després del bucle: "$npres$ és el nombre d'estudiants presentants de C".
- Un cop tenim P', és immediat obtenir la postcondició de la funció `Post`
- Per obtenir P' recorrerem el conjunt C comptant els estudiants amb nota
- Invariant:

```
// Inv: 1 ≤ i ≤ C.mida() + 1
//      i npres = nombre d'estudiants amb nota entre
//      els primers i − 1 estudiants en ordre creixent
//      de DNI
```

Percentatge d'estudiants presentats (amb nota)

```
// Pre: C conté almenys un estudiant
double presentats(const Cjt_estudiants& C) {
  int npres = 0;
  // Inv: 1 ≤ i ≤ |C| + 1,
  //      npres = nombre d'estudiants amb nota entre
  //      els i − 1 primers
  for (int i = 1; i <= C.mida(); ++i) {
     if (C.consultar_iessim(i).te_nota())
        ++npres;
     // npres = nombre d'estudiants amb nota entre els
     // i primers
  }
  // P': npres és el nombre d'estudiants presentants de C
  return double(npres)/C.mida()*100;
}
// Post: el resultat és el percentatge d'estudiants
//       presentats de C
```

Arrodoniment de la nota

Donat un vector d'estudiants, modificar-lo arrodonint-ne les notes a la dècima més propera (es pot fer com a acció o com a funció).

```
// Pre: cert
// Post: vest té les notes dels estudiants arrodonides
// a la dècima més propera del seu valor inicial
void arrodonir_notes(vector<Estudiant>& vest);
```

Arrodoniment de la nota

Farem un recorregut pels elements del vector i suposem que disposem de la funció:

```
// Pre: cert
// Post: retorna el valor més proper a x amb un sol decimal
double arrodoniment(double x) {
  return 0.1*round(x*10);
}
```

Arrodoniment de la nota

Invariant: igual que la postcondició però aplicada només a la part tractada del vector

```
// Inv: vest[0..i − 1] té les notes dels estudiants arrodonides
//      a la dècima més propera del seu valor inicial,
//      0 ≤ i ≤ vest.size()
```

- Quan $i = vest.\texttt{size}()$, $\texttt{Inv} \Longrightarrow \texttt{Post}$
- Si cada iteració incrementa i, per mantenir l'invariant abans hem d'arrodonir $vest[i]$

Arrodoniment de la nota

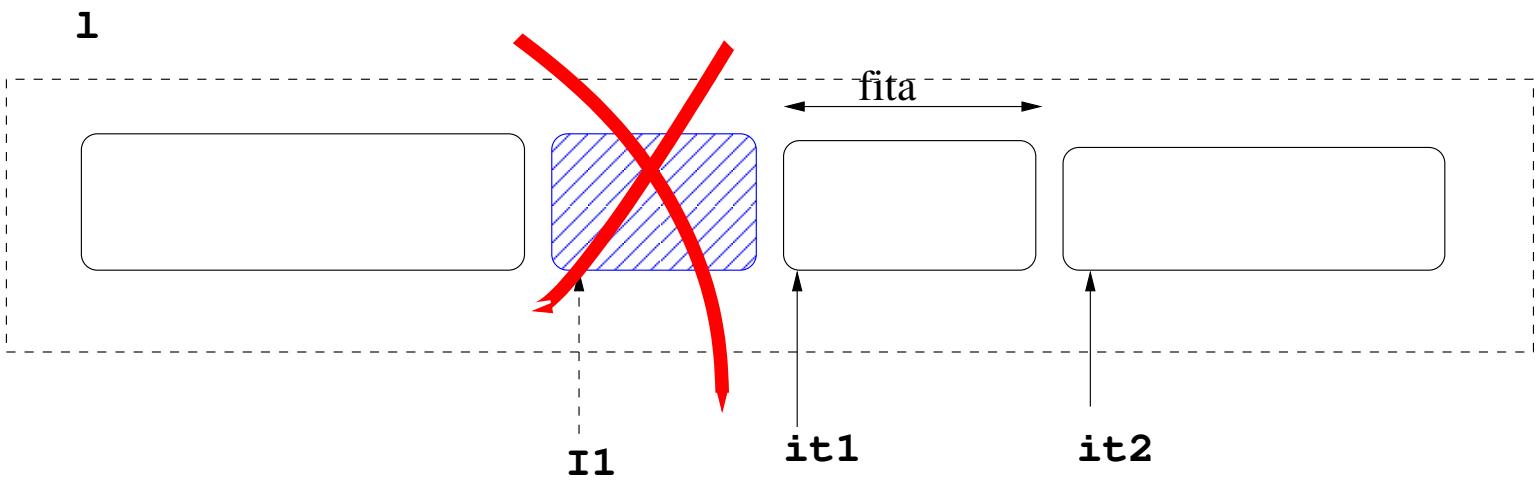
```
// Pre: cert
void arrodonir_notes(vector<Estudiant> &vest) {
  int n = vest.size();
  int i = 0;
  // Inv: ...
  while (i < n) {
    if (vest[i].te_nota()) {
      double aux = arrodoniment(vest[i].consultar_nota());
      vest[i].modificar_nota(aux);
    }
    ++i;
  }
}
// Post: vest té les notes dels estudiants arrodonides
// a la dècima més propera del seu valor inicial
```

Eliminació d'una sublista

```
  // Pre: it1 = I_1 i it2 = I_2 apunten elements de la llista L i
  // it2 apunta a un element igual o posterior a l'element
  // apuntat per it1; l = L
  // Post: La llista l conté tots els elements d'L, excepte
  // els que hi havia entre l'element originalment apuntat per it1 i
  // el predecessor de l'element originalment apuntat per it2, i.e.,
  // l = L[: I_1) · L[I_2 :); '·' denota la concatenació
  // de llistes
template <class T>
void elimina_sublista(list<T>& l,
     list<T>::iterator it1, list<T>::iterator it2);
```

Eliminació d'una subllista

Com a invariant proposem que la subllista entre el valor original I_1 d'$it1$ i el predecessor de l'element al qual apunta $it1$ ha sigut eliminada; quan $it1 = it2$ tindrem la postcondició:



Eliminació d'una sublista

Invariant "formal":

```
// Inv: it1 i it2 = I_2 apunten elements de la llista L i
//      it2 apunta a un element igual o posterior a l'element
//      apuntat per it1, l = L[: I_1) · L[it1 :)
```

- L'invariant és compleix des del primer moment
- Si $it1 = it2$, llavors l'invariant implica la postcondició
- Si l'invariant és cert i $it1 \neq it2$, llavors eliminant l'element apuntat per $it1$ i avançant $it1$ reestablim l'invariant
- La funció de fita és la talla de $L[it1 : it2)$; la precondició (i l'invariant) garanteixen que és ≥ 0, i amb cada iteració disminuirà en una unitat

Eliminació d'una sublista

```
// Pre: it1 = I_1 i it2 = I_2 apunten elements de la llista L i
// it2 apunta a un element igual posterior a l'element apuntat
// per it1; l = L
template <class T>
void elimina_sublista(list<T>& l,
         list<T>::iterator it1, list<T>::iterator it2) {

    while (it1 != it2)
      // Inv: it1 i it2 = I_2 apunten elements de la
      //      llista L i it2 apunta a un element
      //      igual o posterior a l'element apuntat
      //      per it1, l = L[: I_1) · L[it1 :)

      it1 = l.erase(it1);
}
// Post: La llista l conté tots els elements d'L, excepte
// els que hi havia entre I_1 i el predecessor de I_2, i.e.,
// l = L[: I_1) · L[I_2 :)
```